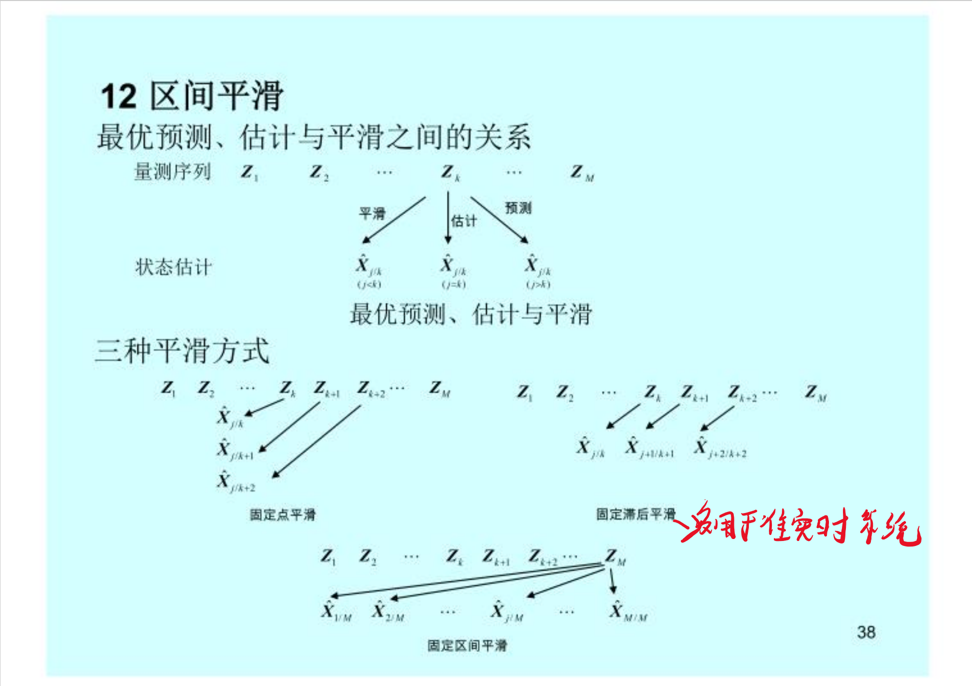
区间平滑

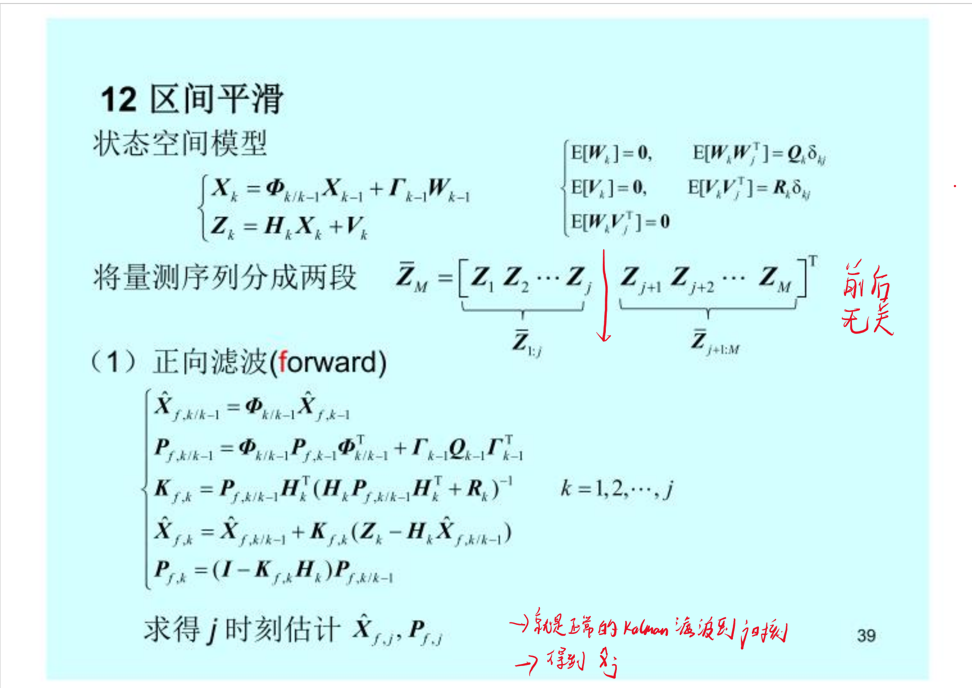
2023年1月10日 13:14



理解：在得到一系列新的量测值后，重新对之前的状态进行估计

是一种数据的后处理

应用：卫星入轨后，运行一段时间，重新对入轨点的信息进行估计



12 区间平滑

（2）反向滤波(backward)

模型改写

$$\begin{cases} X_k = \Phi_{k/k-1} X_{k-1} + \Gamma_{k-1} W_{k-1} \\ Z_k = H_k X_k + V_k \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} X_k = \Phi_{k+1/k}^{-1} X_{k+1} - \Phi_{k+1/k}^{-1} \Gamma_k W_k \\ Z_k = H_k X_k + V_k \end{cases}$$

（手写注：一定可逆）

$$\xrightarrow[W_{k+1}^* = W_k]{\Phi_{k+1/k}^* = \Phi_{k+1/k}^{-1},\ \Gamma_k^* = -\Phi_{k+1/k}^{-1} \Gamma_k} \begin{cases} X_k = \Phi_{k+1/k}^* X_{k+1} + \Gamma_k^* W_{k+1}^* \\ Z_k = H_k X_k + V_k \end{cases}$$

滤波

$$\begin{cases} \hat{X}_{b,k/k+1} = \Phi_{k/k+1}^* \hat{X}_{b,k+1} \\ P_{b,k/k+1} = \Phi_{k/k+1}^* P_{b,k+1} (\Phi_{k/k+1}^*)^{\mathrm{T}} + \Gamma_k^* Q_k \Gamma_k^* \\ K_{b,k} = P_{b,k/k+1} H_k^{\mathrm{T}} (H_k P_{b,k/k+1} H_k^{\mathrm{T}} + R_k)^{-1} \qquad k = M-1, M-2, \cdots, j+1 \\ \hat{X}_{b,k} = \hat{X}_{b,k/k+1} + K_{b,k} (Z_k - H_k \hat{X}_{b,k/k+1}) \\ P_{b,k} = (I - K_{b,k} H_k) P_{b,k/k+1} \end{cases}$$

（手写注：→得到估计值 $\hat{x}_{j+1}$；→再进行一步预测得到 x_j）

求得 j 时刻反向一步预测 $\hat{X}_{b,j/j+1}, P_{b,j/j+1}$

40

12 区间平滑

（3）j 时刻固定点信息融合(smoothing)

$$\begin{cases} \hat{X}_{f,j} = X_j + \Delta_{f,j} \\ \hat{X}_{b,j/j+1} = X_j + \Delta_{b,j/j+1} \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta_{f,j} \sim \mathrm{N}(\mathbf{0}, P_{f,j}), \\ \Delta_{b,j/j+1} \sim \mathrm{N}(\mathbf{0}, P_{b,j/j+1}), \\ \mathrm{cov}(\Delta_{f,j} \Delta_{b,j/j+1}^{\mathrm{T}}) = \mathbf{0} \end{cases}$$

（手写注：forward；误差；backward）

（手写注：相对两组序列的信息融合）

$$\Longrightarrow \begin{cases} P_{s,j} = (P_{f,j}^{-1} + P_{b,j/j+1}^{-1})^{-1} \\ \hat{X}_{s,j} = P_{s,j} (P_{b,j/j+1}^{-1} \hat{X}_{f,j} + P_{f,j}^{-1} \hat{X}_{b,j/j+1}) \end{cases}$$

（4）基于正反向滤波的区间平滑

1) 由前往后正向滤波，获得并存储 $\hat{X}_{f,j}, P_{f,j} (j = 1, 2, \cdots, M)$ ；

2) 由后往前反向滤波，获得 $\hat{X}_{b,j/j+1}, P_{b,j/j+1}$ ，融合获得 $\hat{X}_{s,j}, P_{s,j}$ ；

3) 当 $(j = M-1, M-2, \cdots, 1)$ 完成整个区间平滑。

41

12 区间平滑

（5）RTS区间平滑算法(H.Rauch, F.Tung, C.Striebel, 1965)

先由前往后正向滤波, 获得并存储 $\boldsymbol{\Phi}_{j/j-1}^{\mathrm{T}}, \hat{\boldsymbol{X}}_{f,j/j-1}, \boldsymbol{P}_{f,j/j-1}, \hat{\boldsymbol{X}}_{f,j}, \boldsymbol{P}_{f,j} (j=1,2,\cdots,M)$ 当存储的量

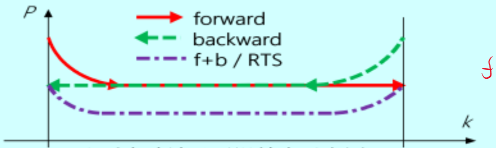
再按由后往前的量测顺序执行如下RTS算法

$$\begin{cases} \boldsymbol{K}_{s,k} = \boldsymbol{P}_{f,k}\boldsymbol{\Phi}_{k+1/k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{f,k+1/k}^{-1} \\ \hat{\boldsymbol{X}}_{s,k} = \hat{\boldsymbol{X}}_{f,k} + \boldsymbol{K}_{s,k}(\hat{\boldsymbol{X}}_{s,k+1} - \hat{\boldsymbol{X}}_{f,k+1/k}) \\ \boldsymbol{P}_{s,k} = \boldsymbol{P}_{f,k} + \boldsymbol{K}_{s,k}(\boldsymbol{P}_{s,k+1} - \boldsymbol{P}_{f,k+1/k})\boldsymbol{K}_{s,k}^{\mathrm{T}} \end{cases}$$

→就是存储量

初值 $\hat{\boldsymbol{X}}_{s,M} = \hat{\boldsymbol{X}}_{f,M}, \boldsymbol{P}_{s,M} = \boldsymbol{P}_{f,M}$

$k = M-1, M-2, \cdots, 1$



正/反向滤波及平滑精度示意图

f+b / RTS 还是相当于"两电阻并联"

（6）可平滑性问题：受系统噪声影响的状态才具可平滑性；

→ 包括一些本身没噪声 却受其他状态噪声影响的状态量.

（7）双向滤波+ P 阵对角线加权平均，可有效降低存储量。 42

→ 例如, 随机常值就不可 $\begin{cases} X_k = X_{k-1} \\ Z_k = X_k + V \end{cases}$