

## 17 状态估计的误差分配与可观测度分析 → 用来衡量滤波效果, 进行定量分析

### 17.1 误差分配原理

$$\text{状态空间模型} \begin{cases} \mathbf{X}_k = \Phi_{k/k-1} \mathbf{X}_{k-1} + \Gamma_{k-1} \mathbf{W}_{k-1} \\ \mathbf{Z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{X}_k + \mathbf{V}_k \end{cases} \quad \begin{cases} E[\mathbf{W}_k] = \mathbf{0}, & E[\mathbf{W}_k \mathbf{W}_j^T] = \mathbf{Q}_k \delta_{kj} \\ E[\mathbf{V}_k] = \mathbf{0}, & E[\mathbf{V}_k \mathbf{V}_j^T] = \mathbf{R}_k \delta_{kj} \\ E[\mathbf{W}_k \mathbf{V}_j^T] = \mathbf{0} \end{cases}$$

滤波均方差阵的传递关系

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k/k-1} &= \Phi_{k/k-1} \mathbf{P}_{k-1} \Phi_{k/k-1}^T + \Gamma_{k-1} \mathbf{Q}_{k-1} \Gamma_{k-1}^T \\ \mathbf{P}_k &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k/k-1} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k)^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^T \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) (\Phi_{k/k-1} \mathbf{P}_{k-1} \Phi_{k/k-1}^T + \Gamma_{k-1} \mathbf{Q}_{k-1} \Gamma_{k-1}^T) (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k)^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^T \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \Phi_{k/k-1} \mathbf{P}_{k-1} \Phi_{k/k-1}^T (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k)^T \\ &\quad + (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \Gamma_{k-1} \mathbf{Q}_{k-1} \Gamma_{k-1}^T (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k)^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^T \\ &= \mathbf{A}_{k/k-1} \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{A}_{k/k-1}^T + \mathbf{B}_{k/k-1} \mathbf{Q}_{k-1} \mathbf{B}_{k/k-1}^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^T \\ &= \dots \text{向前递推} \\ &= \bar{\mathbf{A}}_{k/0} \mathbf{P}_0 \bar{\mathbf{A}}_{k/0}^T + \sum_{i=1}^k \bar{\mathbf{B}}_{k/i-1} \mathbf{Q}_{i-1} (\bar{\mathbf{B}}_{k/i-1})^T + \sum_{i=1}^k \bar{\mathbf{K}}_{k/i} \mathbf{R}_i (\bar{\mathbf{K}}_{k/i})^T \end{aligned} \quad \begin{cases} \bar{\mathbf{A}}_{k/i} = \mathbf{A}_{k/i-1} \cdots \mathbf{A}_{i+2/i+1} \mathbf{A}_{i+1/i} \\ \bar{\mathbf{B}}_{k/i-1} = \bar{\mathbf{A}}_{k/i} \mathbf{B}_{i/i-1} \\ \bar{\mathbf{K}}_{k/i} = \bar{\mathbf{A}}_{k/i} \mathbf{K}_i \\ (i = 1, 2, 3, \dots, k) \end{cases}$$

↳  $\mathbf{P}_k$  受  $\mathbf{P}_0, \mathbf{Q}_0, \mathbf{R}_i$  影响

## 17 状态估计的误差分配与可观测度分析

$$\mathbf{P}_k = \bar{\mathbf{A}}_{k/0} \mathbf{P}_0 \bar{\mathbf{A}}_{k/0}^T + \sum_{i=1}^k \bar{\mathbf{B}}_{k/i-1} \mathbf{Q}_{i-1} (\bar{\mathbf{B}}_{k/i-1})^T + \sum_{i=1}^k \bar{\mathbf{K}}_{k/i} \mathbf{R}_i (\bar{\mathbf{K}}_{k/i})^T$$

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{A}}_{k/i} = \mathbf{A}_{k/i-1} \cdots \mathbf{A}_{i+2/i+1} \mathbf{A}_{i+1/i} \\ \bar{\mathbf{B}}_{k/i-1} = \bar{\mathbf{A}}_{k/i} \mathbf{B}_{i/i-1} \\ \bar{\mathbf{K}}_{k/i} = \bar{\mathbf{A}}_{k/i} \mathbf{K}_i \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, k)$$

若  $\mathbf{P}_0, \mathbf{Q}_i, \mathbf{R}_i$  均为对角阵, 则上式可化为

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k &= \sum_{j=1}^n \underbrace{(\mathbf{P}_0^{(jj)})}_{\text{单元}} \underbrace{(\bar{\mathbf{A}}_{k/0}^{(cj)})}_{\text{单元}} (\bar{\mathbf{A}}_{k/0}^{(cj)})^T + \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^k \bar{\mathbf{B}}_{k/i-1}^{(jj)} \mathbf{Q}_{i-1}^{(jj)} \bar{\mathbf{B}}_{k/i-1}^{(jj)T} + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^k \bar{\mathbf{K}}_{k/i}^{(jj)} \mathbf{R}_i^{(jj)} \bar{\mathbf{K}}_{k/i}^{(jj)T} \\ &= \sum_{j=1}^n \bar{\mathbf{P}}_k^{(j)} + \sum_{j=1}^l \bar{\mathbf{Q}}_k^{(j)} + \sum_{j=1}^m \bar{\mathbf{R}}_k^{(j)} \end{aligned} \quad \text{“均方差阵分解公式”}$$

形式上, 状态估计均方差阵  $\mathbf{P}_k$  可表示为  $\mathbf{P}_0, \mathbf{Q}_i, \mathbf{R}_i$  之加权和, 但注意: 由于滤波增益阵  $\mathbf{K}$  的影响, 它们之间存在相关性; 实际应用时可粗略认为三者之间是相互独立的。

↓  $\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{K}}$  还受  $\mathbf{K}$  影响, 矩阵计算还用到  $\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$

## 17 状态估计的误差分配与可观测度分析

根据  $P_k = \sum_{j=1}^n \bar{P}_k^{(j)} + \sum_{j=1}^l \bar{Q}_k^{(j)} + \sum_{j=1}^m \bar{R}_k^{(j)}$

$$\text{定义 } k \text{ 时刻误差占比 } \begin{cases} p_s^j = \bar{P}_k^{(j)} / P_{k(ss)} \times 100\% & j = 1, 2, \dots, n; s = 1, 2, \dots, n \\ q_s^j = \bar{Q}_k^{(j)} / P_{k(ss)} \times 100\% & j = 1, 2, \dots, l; s = 1, 2, \dots, n \\ r_s^j = \bar{R}_k^{(j)} / P_{k(ss)} \times 100\% & j = 1, 2, \dots, m; s = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

Kalman 滤波状态估计的误差分配列表

状态分量 <sup>o</sup>	误差因素及百分比 <sup>o</sup>											
	初始误差			过程噪声			量测噪声 <sup>o</sup>					
$\hat{X}_{k(1)}$	$p_1^1$	$p_1^2$	$\dots$	$p_1^n$	$q_1^1$	$q_1^2$	$\dots$	$q_1^l$	$r_1^1$	$r_1^2$	$\dots$	$r_1^m$
$\hat{X}_{k(2)}$	$p_2^1$	$p_2^2$	$\dots$	$p_2^n$	$q_2^1$	$q_2^2$	$\dots$	$q_2^l$	$r_2^1$	$r_2^2$	$\dots$	$r_2^m$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$\hat{X}_{k(n)}$	$p_n^1$	$p_n^2$	$\dots$	$p_n^n$	$q_n^1$	$q_n^2$	$\dots$	$q_n^l$	$r_n^1$	$r_n^2$	$\dots$	$r_n^m$

→ 前提是建模要准确

共  $n^*(n+l+m)$  个数据，每行之和为100%、最大者为主要误差源<sub>52</sub>

## 17 状态估计的误差分配与可观测度分析

### 17.2 可观测度分析

(1) 确定性系统与随机系统的可观测性比较

$$\text{确定 } \begin{cases} X_k = \Phi_{k/k-1} X_{k-1} + \Gamma_{k/k-1} u_{k-1} \\ Z_k = H_k X_k \end{cases} \quad \text{随机 } \begin{cases} X_k = \Phi_{k/k-1} X_{k-1} + \Gamma_{k-1} W_{k-1} \\ Z_k = H_k X_k + V_k \end{cases}$$

$$\theta(j, j+N) = \sum_{i=j}^{j+N} \Phi_{i/j}^T H_i^T H_i \Phi_{i/j} > 0 \quad \theta(j, j+N) = \sum_{i=j}^{j+N} \Phi_{i/j}^T H_i^T R_i^{-1} H_i \Phi_{i/j} > 0$$

确定性定常系统的可观测性指数：使如下  $\text{rank}(O_k) = \text{rank}(O_n)$  ( $n$  为状态维数) 的最小正整数  $k$ 。它隐含一种“度”的含义： $k$  越小则从越少拍量测中便可观测或求解出状态。

$$O_k = \begin{bmatrix} H \\ H\Phi \\ \vdots \\ H\Phi^k \end{bmatrix}$$

## 17 状态估计的误差分配与可观测度分析

### (2) 可观测度的奇异值分解(SVD)分析法

记SVD分解  $O(j, j+N) = U\Sigma V^T$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n \end{bmatrix}$$

它认为：可用于定量分析系统状态的可观测性大小，奇异值越大其对应状态分量可观测度越高，Kalman滤波效果就会越好；*不一定*；但是：该方法未考虑随机噪声的影响，理论上是有缺陷的。

文献中还有分段线性定常系统 (Piece-Wise Constant Systems, PCWS) 方法、条件数方法等，一般是适用于分析确定性系统，对于随机系统都是不精密的！

54

## 17 状态估计的误差分配与可观测度分析

反例 *两个子系统*

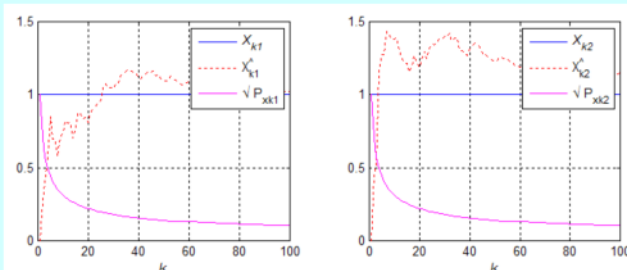
$$\begin{cases} \begin{bmatrix} X_{k,1} \\ X_{k,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{k-1,1} \\ X_{k-1,2} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} Z_{k,1} \\ Z_{k,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{k,1} \\ X_{k,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{k,1} \\ 10V_{k,2} \end{bmatrix} \end{cases}$$

$V_{k,1}, V_{k,2}$  均是方差为1的白噪声

$O = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$  *SVD分解后 10 1*

虽然有  $\sigma_2 > \sigma_1$  但两者滤波精度一样

Kalman滤波  
仿真结果：



更一般地，滤波精度相同只需满足条件（与Q和R都有关）：

$$\begin{cases} X_k = \phi X_{k-1} + W_{k-1} \\ Z_k = HX_k + V_k \end{cases} \quad P_k = \frac{-(H^2\Gamma^2Q + R - \phi^2R) + \sqrt{(H^2\Gamma^2Q + R - \phi^2R)^2 + 4H^2\phi^2\Gamma^2QR}}{2H^2\phi^2}$$

55

## 17 状态估计的误差分配与可观测度分析

### (3) 可观测度的协方差分析法

如果随机系统建模准确，标准Kalman滤波均方差阵  $P_k$  反映了各状态之间的协方差，其中对角线元素即为对应状态分量的估计误差，从  $P_k$  随时间的变化过程中可以看出状态估计误差的变化情况，定义第  $j$  状态分量的可观测度

$$\sigma_{k(j)} = \sqrt{\frac{P_{0(jj)}}{P_{k(jj)}}}$$

→ 定程度的定量， $P_0$  是自己取的

可观测度强弱判断的经验阈值，比如取

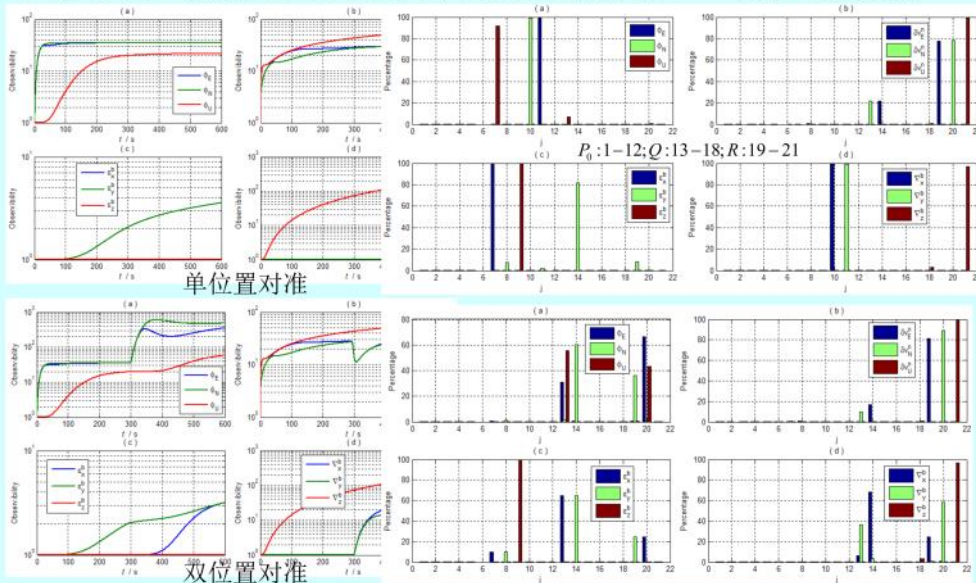
$$\begin{cases} \sigma_{k(j)} \leq 1 & \text{不可观测} \\ 1 < \sigma_{k(j)} \leq 2 & \text{弱} \\ 2 < \sigma_{k(j)} \leq 10 & \text{中等} \\ \sigma_{k(j)} > 10 & \text{强} \end{cases}$$

→ 经验值

56

## 17 状态估计的误差分配与可观测度分析

应用举例（惯导静基座单位位置对准或双位置初始对准，12状态+速度量测）



→ 0行用到再仔细研究