滤波器稳定性分析

2023年1月11日　　11:51

16 滤波器稳定性分析

16.1 确定性系统的可控性、可观性、稳定性和状态观测器

（1）可控性

确定性时变系统 $\begin{cases} \boldsymbol{X}_k = \boldsymbol{\Phi}_{k/k-1}\boldsymbol{X}_{k-1} + \boldsymbol{\Gamma}_{k/k-1}\boldsymbol{u}_{k-1} \\ \boldsymbol{Z}_k = \boldsymbol{H}_k\boldsymbol{X}_k \end{cases}$

在 j 时刻完全可控是指：存在一个正整数 N 和有界输入序列 $\{\boldsymbol{u}_j, \boldsymbol{u}_{j+1}, \cdots, \boldsymbol{u}_{j+N-1}\}$，使得系统从任意状态 $\boldsymbol{X}_j$ 出发可转变为 $\boldsymbol{X}_{j+N}=\boldsymbol{0}$

→ 举例理解，马路上某一时刻行驶的车，经过一段时间，车速控制为0

判定方法：可控性矩阵行满秩(秩判据)

$$\boldsymbol{C}(j, j+N) = [\boldsymbol{\Gamma}_{j+N/j+N-1} \mid \boldsymbol{\Phi}_{j+N/j+N-1}\boldsymbol{\Gamma}_{j+N-1/j+N-2} \mid \cdots \mid \boldsymbol{\Phi}_{j+N/j+1}\boldsymbol{\Gamma}_{j+1/j}]$$

$\Longleftrightarrow$ 格莱姆矩阵判据

$$\boldsymbol{\Lambda}(j, j+N) = \boldsymbol{C}(j, j+N)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(j, j+N) = \sum_{i=j}^{j+N-1} \boldsymbol{\Phi}_{k+N/i+1}\boldsymbol{\Gamma}_{i+1/i}\boldsymbol{\Gamma}_{i+1/i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}_{k+N/i+1}^{\mathrm{T}} > 0$$

（可达？一致可控？）— 可控

→ 0到任意状态

38

在惯导中不必证明filter稳定性再去用
讲授这一节只为了丰富理论

16 滤波器稳定性分析

（2）可观性

在 j 时刻完全可观是指：存在一个正整数 N，使得由量测序列 $\{\boldsymbol{Z}_j, \boldsymbol{Z}_{j+1}, \cdots, \boldsymbol{Z}_{j+N}\}$ 可以唯一确定状态 $\boldsymbol{X}_j$(或 $\boldsymbol{X}_{j+N}$)

判定方法：可观性矩阵列满秩 $\boldsymbol{O}(j, j+N) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_j \\ \boldsymbol{H}_{j+1}\boldsymbol{\Phi}_{j+1/j} \\ \vdots \\ \boldsymbol{H}_{j+N}\boldsymbol{\Phi}_{j+N/j} \end{bmatrix}$

$$\Longleftrightarrow \boldsymbol{\Theta}(j, j+N) = \boldsymbol{O}^{\mathrm{T}}(j, j+N)\boldsymbol{O}(j, j+N) = \sum_{i=j}^{j+N} \boldsymbol{\Phi}_{i/j}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_i\boldsymbol{\Phi}_{i/j} > 0$$

39

16 滤波器稳定性分析

（3）稳定性

在经典控制论中稳定性定义为：系统在初始扰动的影响下，不论引起的初始偏差多大，当扰动撤除后，其动态过程会逐渐衰减恢复至零（零为平衡工作点）。

现代控制论中李雅普诺夫稳定性定义见下图（稳定、一致稳定、渐进稳定、一致渐进稳定、大范围稳定等概念）。

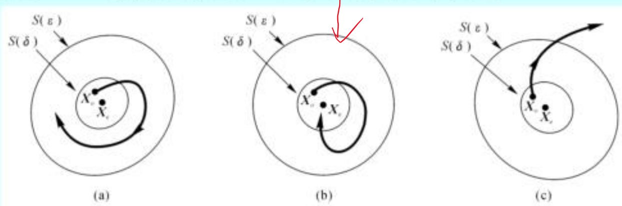
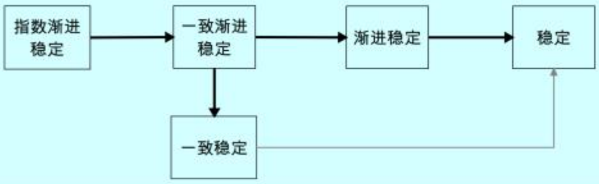


图 E.1 稳定、渐进稳定和不稳定示意图

(a) 稳定；(b) 渐进稳定；(c) 不稳定

16 滤波器稳定性分析

各种稳定性之间的关系



稳定性分析与控制输入无关，因而对于线性齐次系统

$$\boldsymbol{X}_k = \boldsymbol{\Phi}_{k/k-1}\boldsymbol{X}_{k-1}$$

应用李雅普诺夫直接法进行渐进稳定性判别，其在平衡点 $\boldsymbol{X}_e = \boldsymbol{0}$ 处大范围渐进稳定的充要条件是：对于给定任意对称矩阵 $\boldsymbol{B}_k > 0$，存在实对称矩阵 $\boldsymbol{A}_k > 0$，满足矩阵方程

$$\boldsymbol{\Phi}_{k/k-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{\Phi}_{k/k-1} - \boldsymbol{A}_{k-1} = -\boldsymbol{B}_{k-1}$$

并且二次型函数

$$v(\boldsymbol{X}_k, k) = \boldsymbol{X}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{X}_k$$

为系统的李雅普诺夫能量函数。

16 滤波器稳定性分析

（间接法判断稳定性）系统一致渐进稳定等价于：存在常数$c_1 > 0, c_2 > 0$，使得对所有的$k \geq l \geq 0$，满足

$$\left\|\boldsymbol{\Phi}_{k/l}\right\| \leq c_2 \mathrm{e}^{-c_1(t_k - t_l)}$$

上式蕴含的含义解释如下：假设$\boldsymbol{X}_0^1$和$\boldsymbol{X}_0^2$为系统的两个不同初值，与它们对应的状态解分别为

$$\boldsymbol{X}_k^1 = \boldsymbol{\Phi}_{k/0}\boldsymbol{X}_0^1 \quad \text{和} \quad \boldsymbol{X}_k^2 = \boldsymbol{\Phi}_{k/0}\boldsymbol{X}_0^2$$

两者之差为

$$\boldsymbol{X}_k^1 - \boldsymbol{X}_k^2 = \boldsymbol{\Phi}_{k/0}(\boldsymbol{X}_0^1 - \boldsymbol{X}_0^2)$$

且有

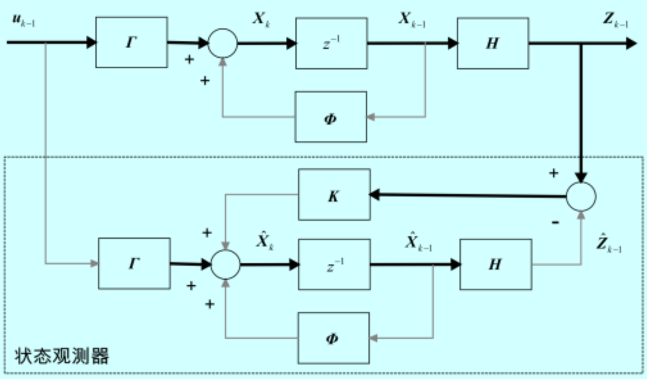
$$\left\|\boldsymbol{X}_k^1 - \boldsymbol{X}_k^2\right\| = \left\|\boldsymbol{\Phi}_{k/0}(\boldsymbol{X}_0^1 - \boldsymbol{X}_0^2)\right\| \leq \left\|\boldsymbol{\Phi}_{k/0}\right\|\left\|(\boldsymbol{X}_0^1 - \boldsymbol{X}_0^2)\right\| \leq c_2 \mathrm{e}^{-c_1 t_k}\left\|(\boldsymbol{X}_0^1 - \boldsymbol{X}_0^2)\right\| \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

可见，如果系统一致渐进稳定，则状态$\boldsymbol{X}_k^1$和$\boldsymbol{X}_k^2$之间的差别将随时间增长而逐渐消失，即状态解渐进不受初值的影响。

42

16 滤波器稳定性分析

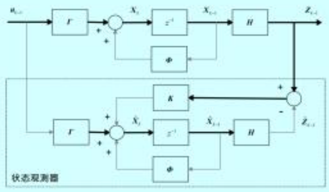
（4）状态观测器



线性定常系统状态观测器结构图

43

16 滤波器稳定性分析



状态观测器的状态方程

输入

$$\begin{aligned}\hat{X}_k &= \Phi\hat{X}_{k-1}+\Gamma u_{k-1}+K(Z_{k-1}-\hat{Z}_{k-1})\\ &= \Phi\hat{X}_{k-1}+\Gamma u_{k-1}+K(Z_{k-1}-H\hat{X}_{k-1})\\ &= (\Phi-KH)\hat{X}_{k-1}+\Gamma u_{k-1}+KZ_{k-1}\end{aligned}$$

观测器的状态误

$$\begin{aligned}\delta X_k &= X_k-\hat{X}_k=(\Phi X_{k-1}+\Gamma u_{k-1})-[(\Phi-KH)\hat{X}_{k-1}+\Gamma u_{k-1}+KZ_{k-1}]\\ &= (\Phi X_{k-1}+\Gamma u_{k-1})-[(\Phi-KH)\hat{X}_{k-1}+\Gamma u_{k-1}+KHX_{k-1}]\\ &= (\Phi-KH)(X_{k-1}-\hat{X}_{k-1})=(\Phi-KH)\delta X_{k-1}\end{aligned}$$

观测器稳定的必要条件是不能观部分渐进稳定；充分条件是系统完全可观。

44

以上均为现控内容，针对确定性系统

16 滤波器稳定性分析

16.2 随机系统的随机可控性和随机可观性

随机系统模型 $\begin{cases} X_k=\Phi_{k/k-1}X_{k-1}+\Gamma_{k-1}W_{k-1}\\ Z_k=H_kX_k+V_k\end{cases}$

$$\begin{cases}E[W_k]=0, & E[W_kW_j^T]=Q_k\delta_{kj}\\ E[V_k]=0, & E[V_kV_j^T]=R_k\delta_{kj}\\ E[W_kV_j^T]=0\end{cases}$$

（1）随机可控性

$$\Lambda(j,j+N)=\sum_{i=j}^{j+N-1}\Phi_{k+N/i+1}\Gamma_{i+1/i}\Gamma_{i+1/i}^T\Phi_{k+N/i+1}^T>0$$

在 j 时刻是完全随机可控定义为：

$$\Lambda(j,j+N)=\sum_{i=j}^{j+N-1}\Phi_{j+N/i+1}\Gamma_{i+1/i}\boxed{Q_i}\Gamma_{i+1/i}^T\Phi_{j+N/i+1}^T>0$$ 正定

完全随机可控含义：

$$X_{j+N}=\Phi_{j+N/j}X_j+\sum_{i=j}^{j+N}\Phi_{j+N/i}\Gamma_{i+1/i}W_i$$ →j转移到j+N

$$E[(X_{j+N}-\Phi_{j+N/j}X_j)(X_{j+N}-\Phi_{j+N/j}X_j)^T]$$ →两个状态的线性组合的协方差>0 →说明这线性组合为随机变量

↓

其在空间中可以任意取值

↓

从X_j出发，在X_{j+N}时刻是取任何值的概率都存在

举例理解：X_j时平衡车的速度为何值，在X_{j+N}时，车的速度可以控制到任意值

$$=E\left[(\sum_{i=j}^{j+N}\Phi_{j+N/i}\Gamma_{i+1/i}W_i)(\sum_{i=j}^{j+N}\Phi_{j+N/i}\Gamma_{i+1/i}W_i)^T\right]$$ 噪声

$$=\sum_{i=j}^{j+N}\Phi_{j+N/i}\Gamma_{i+1/i}Q_i\Gamma_{i+1/i}^T\Phi_{j+N/j}^T=\Lambda(j,j+N)$$

从任意给定的状态 X_j 出发，$X_{j+N}=0$ 的概率为正。

45

16 滤波器稳定性分析

（2）随机可观性

$$\Theta(j,j+N)=\sum_{i=j}^{j+N}\Phi_{i/j}^TH_i^TH_i\Phi_{i/j}>0$$

在 j 时刻是完全随机可观定义为：

$$\Theta(j,j+N)=\sum_{i=j}^{j+N}\Phi_{i/j}^TH_i^T\boxed{R_i^{-1}}H_i\Phi_{i/j}>0$$

完全随机可观含义：

令 $X_j^*=\Theta^{-1}(j,j+N)\sum_{i=j}^{j+N}\Phi_{i/j}^TH_i^TR_i^{-1}Z_i$ (*) →一关于量测的线性组合

→ Kalman滤波就是通过量测来估计

所以Kalman滤波系统应是随机可控

可用于理论分析

则有 $E[X_j^*]=\Theta^{-1}(j,j+N)\sum_{i=j}^{j+N}\Phi_{i/j}^TH_i^TR_i^{-1}E[Z_i]$

$$\begin{aligned}&=\Theta^{-1}(j,j+N)\sum_{i=j}^{j+N}\Phi_{i/j}^TH_i^TR_i^{-1}E[H_iX_i]\\ &=\Theta^{-1}(j,j+N)\sum_{i=j}^{j+N}\Phi_{i/j}^TH_i^TR_i^{-1}H_iE\left[\Phi_{i/j}X_j+\sum_{m=j+1}^{i}\Phi_{i/m}\Gamma_{m-1}W_{m-1}\right]\\ &=\Theta^{-1}(j,j+N)\sum_{i=j}^{j+N}\Phi_{i/j}^TH_i^TR_i^{-1}H_i\Phi_{i/j}E\left[X_j\right]=E\left[X_j\right]\end{aligned}$$

由式(*)构造的 X_j^* 是 j 时刻状态 X_j 的线性无偏估计。

46

由式(*)构造的 X_j^* 是 j 时刻状态 X_j 的线性无偏估计。

↳ 通过一段时间前的序列的线性组合能够无偏估计出 X_j

16 滤波器稳定性分析

16.3 滤波器的稳定性分析

确定性系统的状态观测

$$\begin{aligned}\hat{X}_k &= \Phi\hat{X}_{k-1} + \Gamma u_{k-1} + K(Z_{k-1} - \hat{Z}_{k-1}) \\ &= \Phi\hat{X}_{k-1} + \Gamma u_{k-1} + K(Z_{k-1} - H\hat{X}_{k-1}) \\ &= (\Phi - KH)\hat{X}_{k-1} + \Gamma u_{k-1} + KZ_{k-1}\end{aligned}$$

$$\begin{cases} X_k = \Phi_{k/k-1}X_{k-1} + \Gamma_{k-1}W_{k-1} \\ Z_k = H_k X_k + V_k \end{cases} \xRightarrow{\text{估计}} \begin{aligned}\hat{X}_k &= (I - K_k H_k)\Phi_{k/k-1}\hat{X}_{k-1} + K_k Z_k \\ &= G_{k/k-1}\hat{X}_{k-1} + K_k Z_k\end{aligned}$$

滤波器系统稳定的含义（李雅普诺夫意义下的渐进稳定）：对于任意给定的两个初始状态 $\hat{X}_0^1, \hat{X}_0^2$ ，如果总有

$$\lim_{k\to\infty}\left\|\hat{X}_k^1 - \hat{X}_k^2\right\| = 0$$

滤波器稳定的三个充分条件（原系统满足任何一个即可）：

1）系统一致完全随机可控并且一致完全随机可观；
2）系统***推广形式***随机可控并且一致完全随机可观；
3）对于定常系统，系统完全***随机可稳定***并且完全***随机可检测***。

16 滤波器稳定性分析

推广形式可控是指：

矩阵，P>0即可

$$\bar{\Lambda}(j, j+N) = \boxed{\Phi_{j+N/j} P_j \Phi_{j+N/j}^{\mathrm{T}}} + \sum_{i=j}^{j+N-1} \Phi_{j+N/i+1}\Gamma_{i+1/i} Q_i \Gamma_{i+1/i}^{\mathrm{T}} \Phi_{j+N/i+1}^{\mathrm{T}} > 0$$

只针对定常

完全随机可稳定是指：系统经过可控性分解为可控部分和不可控部分，并且不可控部分是稳定的。

时变系统分解不了

完全随机可检测是指：系统经过可观性分解为可观部分和不可观部分，并且不可观部分是稳定的。

充分条件是判断滤波器稳定的上界条件（过于严格），即若满足充分条件，则可肯定滤波器是稳定的；但若不满足充分条件，则还不能判断滤波器是否稳定。其应用范围十分有限。

16 滤波器稳定性分析

举例

考虑线性定常系统 $\begin{cases} X_k = \phi X_{k-1} + W_{k-1} \\ Z_k = X_k + V_k \end{cases}$，其中：$W_k$ 和 V_k 均为零均值白噪声、方差分别为 $Q \geq 0$ 和 $R > 0$，且两者间不相关。试分析滤波稳定性。

解：根据 Kalman 滤波方程，得

$$\hat{X}_{k/k-1} = \phi \hat{X}_{k-1} \tag{1}$$

$$P_{k/k-1} = \phi^2 P_{k-1} + Q \tag{2}$$

$$K_k = \frac{P_{k/k-1}}{P_{k/k-1} + R} = \frac{\phi^2 P_{k-1} + Q}{\phi^2 P_{k-1} + Q + R} \tag{3}$$

$\theta = [H] = [1]$

一维系统

$$\hat{X}_k = \hat{X}_{k/k-1} + K_k(Z_k - \hat{X}_{k/k-1}) = (1 - K_k)\hat{X}_{k/k-1} + K_k Z_k \tag{4}$$

$$P_k = (1 - K_k)P_{k/k-1} = (1 - \frac{P_{k/k-1}}{P_{k/k-1} + R})P_{k/k-1} = RK_k \tag{5}$$

易知系统随机可观。

1）若 $Q > 0$，系统随机可控的，按条件 1）滤波稳定；

2）若 $Q = 0$、$P_0 > 0$，系统推广随机可控，按条件 2）滤波稳定；

3）若 $Q = 0$、$P_0 = 0$、$|\phi| < 1$，如按可控性分解，状态方程可以看作只含一个不可控的子系统，但它是稳定的，按条件 3）滤波稳定；由式（3）得 $K_k = 0$，量测修正作用消失，但 $|\phi| < 1$，不论状态取何初值，状态都会收敛至 0。

4）若 $Q = 0$、$P_0 = 0$、$|\phi| \geq 1$，不满足三个条件中的任何一个，不能判断滤波器稳定。由式（3）得 $K_k = 0$，量测的修正作用消失，事实上，这时系统状态方程相当于是确定性方程，状态依赖于初始值，由 $\hat{X}_k = \phi \hat{X}_{k-1}$ 可见，当 $|\phi| \geq 1$ 时状态估计是不稳定的。